МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ОБ $\mathfrak{F}$-СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНОЙ ФАКТОРИЗУЕМОЙ ГРУППЫ

С.Ф. Каморников[1], **О.Л. Шеметкова**[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Москва*

ON $\mathfrak{F}$-SUBNORMAL SUBGROUPS OF A FINITE FACTORISED GROUP

S.F. Kamornikov[1], **O.L. Shemetkova**[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Plekhanov Russian University of Economics, Moscow*

Изучаются свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных и σ-субнормальных подгрупп конечной факторизуемой группы.

Ключевые слова*: конечная факторизуемая группа, $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа, σ-субнормальная подгруппа, формация, корадикал.*

The properties of $\mathfrak{F}$-subnormal and σ-subnormal subgroups of a finite factorised group are studied.

Keywords*: finite factorised group, $\mathfrak{F}$-subnormal subgroup, σ-subnormal subgroup, formation, residual.*

Введение

Известно (см., например, [1]), что подгруппа H, субнормальная в подгруппах A и B конечной группы G, не обязана быть субнормальной в их порождении $<A, B>$. В то же время, как показано в [2] (для разрешимой конечной группы G) и в [3] (для произвольной конечной группы G), если подгруппы A и B перестановочны, то из субнормальности подгруппы H в подгруппах A и B следует, что H субнормальна в произведении AB.

В теории классов групп предложенная Вилaндтом идея транзитивного замыкания нормальности нашла воплощение в понятиях «$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа», «K-$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа» (или «$\mathfrak{F}$-субнормальная в смысле Кегеля подгруппа»).

Концепция $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы предложена Картером и Хоуксом в 1967 году [4]: Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппа H конечной группы G называется *$\mathfrak{F}$-субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$$

такая, что $H_i / Core_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для всех i = 1, 2, …, n (множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы G далее обозначается $sn_{\mathfrak{F}}(G)$).

Простая проверка показывает, что, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп, то любая $\mathfrak{N}$-субнормальная подгруппа группы G является субнормальной. Более того, для разрешимой конечной группы G справедливо равенство $sn_{\mathfrak{N}}(G) = sn(G)$.

Другое понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности, развивающее идею субнормальности, предложено Кегелем [5]: Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп, то подгруппа H конечной группы G называется *$\mathfrak{F}$-субнормальной в смысле Кегеля* (или просто *K-$\mathfrak{F}$-субнормальной*), если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G$$

такая, что либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо $H_i / Core_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для всех i = 1, 2, … , n (множество всех K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы G обозначается $sn_{K-\mathfrak{F}}(G)$).

Простая проверка показывает, что для любой конечной группы G справедливо равенство $sn_{K-\mathfrak{N}}(G) = sn(G)$. В связи с этим естественно возникает вопрос о нахождении аналога теоремы Майера – Виландта для K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп. В классе разрешимых конечных групп этот вопрос получил положительное решение в работе [6]:

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация групп. Пусть A и B – подгруппы разрешимой конечной группы $G = AB$. Если подгруппа H из пересечения $A \cap B$ является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в подгруппах A и B, то она K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

Отметим, что для произвольной конечной группы этот результат не верен. Соответствующий пример приведен в [6] (см. также [7]). Несмотря на это подгруппа H из пересечения подгрупп A и B конечной группы $G = AB$ обладает рядом интересных свойств, которые приводятся в данной работе. Главное из этих свойств состоит в том, что если $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация и подгруппа H является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в A и B, причем $AB = BA$, то ее $\mathfrak{F}$-корадикал субнормален в произведении AB. Кроме того, в работе анализируется возможность доказательства аналога теоремы Майера – Виландта для σ-субнормальных подгрупп.

1 Предварительные результаты

В работе рассматриваются только конечные группы. Используются определения и обозначения, принятые в [7], [8].

Напомним, что *формация* – это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Если $\mathfrak{F}$ – непустая формация, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$ (подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ называется $\mathfrak{F}$-*корадикалом* группы G).

Далее нам понадобится следующая информация о субнормальных и K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгруппах.

***Лемма* 1.1** [7, лемма 3.1.2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Пусть A, B и N – подгруппы группы G, причем $A \subseteq B$ и подгруппа N нормальна в G. Тогда*:

1) *если подгруппа A является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в группе G, то она K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в B*;

2) *если подгруппа A является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в группе G, то подгруппа HN/N является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G/N*;

3) *если $N \subseteq A$, то подгруппа A является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G тогда и только тогда, когда подгруппа A/N является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G/N.*

***Лемма* 1.2** [7, лемма 3.1.5]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Если подгруппа H является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в группе G, то подгруппа $H^{\mathfrak{F}}$ субнормальна в G.*

***Лемма* 1.3** [9, лемма 7.3.16]. *Пусть H – субнормальная подгруппа группы G, содержащаяся в максимальной подгруппе A группы G. Тогда $H \subseteq Core_G(A)$.*

Формация $\mathfrak{F}$ называется *решеточной*, если множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп в любой группе образует подрешетку решетки всех подгрупп этой группы.

Каждая решеточная формация $\mathfrak{F}$ является наследственной формацией Фиттинга [7], т. е. она замкнута относительно взятия подгрупп и, кроме того, из $G = AB$, где $A \lhd G$, $B \lhd G$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Из определения класса Фиттинга следует, что в любой группе G существует $\mathfrak{F}$-*радикал* $G_{\mathfrak{F}}$, т. е. наибольшая нормальная подгруппа из G, принадлежащая $\mathfrak{F}$ (она совпадает с произведением всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп из G). В дальнейшем мы будем опираться на следующий результат, устанавливающий связь K-$\mathfrak{F}$-субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы с ее $\mathfrak{F}$-радикалом.

***Лемма* 1.4** [8, лемма 6.3.8]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная решеточная формация. Если подгруппа H является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в группе G и принадлежит формации $\mathfrak{F}$, то H содержится в $\mathfrak{F}$-радикале группы G.*

2 Основные результаты

***Теорема* 2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация групп. Пусть A и B – подгруппы группы $G = AB$. Если подгруппа H из пересечения $A \cap B$ является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в подгруппах A и B, то справедливы следующие утверждения*:

1) *подгруппа $H^{\mathfrak{F}}$ субнормальна в группе G*;

2) *если подгруппа A максимальна в G, то $H^{\mathfrak{F}} \subseteq Core_G(A)$*;

3) *если подгруппа A максимальна в G и $Core_G(A) = 1$, то $H \in \mathfrak{F}$*;

4) *если фармация $\mathfrak{F}$ является решеточной, подгруппа A максимальна в G и $Core_G(A) = 1$, то H содержится в $\mathfrak{F}$-радикале подгруппы A.*

Доказательство. 1) Ввиду леммы 1.2 подгруппа $H^{\mathfrak{F}}$ субнормальна в подгруппах A и B. Тогда ввиду теоремы Виландта из [3] подгруппа $H^{\mathfrak{F}}$ субнормальна в группе G.

2) Ввиду утверждения 1) подгруппа $H^{\mathfrak{F}}$ субнормальна в группе G. Так как подгруппа A максимальна в группе G, то ввиду леммы 1.3 справедливо включение $H^{\mathfrak{F}} \subseteq Core_G(A)$.

3) Ввиду утверждения 2) справедливо включение $H^{\mathfrak{F}} \subseteq Core_G(A) = 1$. Следовательно, $H^{\mathfrak{F}} = 1$, а значит, $H \in \mathfrak{F}$.

4) Ввиду утверждения 3) подгруппа H принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Поэтому по лемме 1.4 имеем $H \subseteq A_{\mathfrak{F}}$. □

Из теоремы 2.1 и леммы 1.1 с учетом теоремы 8.5 из [10] для наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ легко выводится следующий результат. Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

***Теорема* 2.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация. Пусть A и B – подгруппы группы $G = AB$, имеющей разрешимый $\mathfrak{F}$-корадикал. Если подгруппа H из пересечения $A \cap B$ является К-$\mathfrak{F}$-субнормальной в подгруппах A и B, то она К-$\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

Из теоремы 2.1 имеем также, что при анализе *К*-$\mathfrak{F}$-субнормальности в группе $G = AB$ подгруппы *H*, которая содержится в пересечении $A \cap B$ и *К*-$\mathfrak{F}$-субнормальна в подгруппах A и *B*, в предельном случае следует рассматривать примитивную (в частности, простую) группу *G*.

Проанализируем этот случай, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\sigma$ – формация всех σ-нильпотентных групп и H – σ-субнормальная подгруппа группы *G*.

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Следуя [11], будем говорить, что группа G является:

– σ-*примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$;

– σ-*нильпотентной*, если *G* является σ_i-замкнутой для всех $i \in I$;

– σ-*субнормальной*, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо группа $H_i / Core_{H_i}(H_{i-1})$ является σ-примарной.

Как отмечено в [10], класс $\mathfrak{N}_\sigma$ всех σ-нильпотентных групп является наследственной насыщенной формацией Фиттинга. Кроме того, подгруппа *H* является σ-субнормальной в G тогда и только тогда, когда *H* является *К*-$\mathfrak{N}_\sigma$-субнормальной в группе *G*.

Следующий пример показывает, что существует нетривиальное разбиение σ, для которого подгруппа H из пересечения $A \cap B$ подгрупп A и B факторизуемой группы $G = AB$ может быть σ-субнормальной в подгруппах A и *B*, но не σ-субнормальной в *G*.

***Пример* 2.1.** Пусть $\pi = \{2, 5\}$ и $\sigma = \{\pi, \pi'\}$. Пусть A и B – подгруппы группы $G \cong A_5$ порядка 12 и 10 соответственно. Простая проверка показывает, что подгруппа $H = A \cap B$ порядка 2 является σ-субнормальной в подгруппах A и B (подгруппа H σ-субнормальна в *A*, так как H субнормальна в *A*; подгруппа H σ-субнормальна в *B*, так как B является π-группой). Так как группа G проста, то подгруппа H не является σ-субнормальной в *G*.

Вопрос 2.1. *Пусть p – простое число, $\pi = \{p\}$ и $\sigma = \{\pi, \pi'\}$. Пусть A и B – подгруппы группы $G = AB$. Верно ли, что подгруппа H из пересечения $A \cap B$ является σ-субнормальной в G, если она σ-субнормальна в подгруппах A и B?*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wielandt*, *H.* Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen / H. Wielandt // Math. Z. – 1939. – Vol. 45. – P. 209–244.

2. *Maier*, *R.* Um problema da teoria dos subgrupos subnormais / R. Maier // Bol. Soc. Brasil Mat. – 1977. – Vol. 8, № 2. – P. 127–130.

3. *Wielandt*, *H.* Subnormalität in faktorisierten endlichen Gruppen / H. Wielandt // J. Algebra. – 1981. – Vol. 69, № 2. – P. 305–311.

4. *Carter*, *R.* The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group / R. Carter, T. Hawkes // J. Algebra. – 1967. – Vol. 5, № 2. – P. 175–202.

5. *Kegel*, *O.H.* Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30, № 3. – P. 225–228.

6. *Каморников*, *С.Ф.* $\mathfrak{F}$-Достижимость в факторизуемых группах / С.Ф. Каморников // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 65–67.

7. *Каморников*, *С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Белорус. наука, 2003. – 256 с.

8. *Ballester-Bolinches*, *A.* Classes of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006. – 385 p.

9. *Lennox*, *J.C.* Subnormal subgroups of groups / J.C. Lennox, S.E. Stonehewer. – Oxford: Clarendon Press, 1987. – 348 p.

10. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

11. *Скиба*, *А.Н.* О σ-свойствах конечных групп I / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 89–96.

Поступила в редакцию 29.12.17.